Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2014/2015

AM210 - Analisi Matematica 3 - Tutorato I

Docente: Prof. Giovanni Mancini

Tutori: A. Mazzoccoli, M. Nanni

Si possono verificare gli esercizi consultando le soluzioni ai tutorati I e II dell'A.A. 2013/2014.

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti:

$\circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^4+y^4}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6+y^2}$

$\circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^8+2y^2}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{3x^2+3y^2}-1}{x^2+y^2}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(4xy^{\frac{3}{2}})}{x^2+y^2}$

$\circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y+(x^2+y^2)\cos(x^4+y^7)}{x^2+y^2}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^6+y^4}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

$\circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin(xy)}{x^2+y^2}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}$

$\circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2)$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^5+y^5)-x^5}{x^4+y^4}$ $\quad \circ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3+x^3y^2}{x^4+y^4}$

Esercizio 2. Discutere la continuità delle seguenti funzioni:

$$\circ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad \circ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\circ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad \circ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\circ f(x,y) = \begin{cases} \frac{\arctan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad \circ f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^3y)}{\sqrt{x^8+y^6}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Esercizio 3. Discutere esistenza di derivate parziali e direzionali e differenziabilità nell'origine delle seguenti funzioni:

$$\circ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad \circ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\circ f(x,y) = \begin{cases} y^{\frac{4}{3}}\sin(\frac{1}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad \circ f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\circ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \circ\, f(x,y) = \begin{cases} xy^2 \sin(\frac{1}{x}) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\circ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|}{[|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad \circ\, f(x,y) = \sqrt{|xy|}$$

<u>Esercizio 4.</u> Discutere l'esistenza di derivate parziali e direzionali e la differenziabilità nell'origine al variare del parametro $\alpha > 0$ della seguente funzione:

$$\circ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{(x^6+y^2)^\alpha} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

<u>Esercizio 5.</u> Esibire un esempio di funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che nell'origine sia:

-Continua, parzialmente derivabile, ma derivabile non in tutte le direzioni;

-Continua, ma non parzialmente derivabile né derivabile in tutte le direzioni;

-Parzialmente derivabile, derivabile in ogni direzione, ma discontinua;

-Parzialmente derivabile, ma discontinua e derivabile non in tutte le direzioni.